

## درسنامه کنکوری مقاطع مخروطی

فصل پنجم ریاضی عمومی پیش دانشگاهی رشته علوم تجربی

آموزش نکته ها و مفاهیم



پاسخ های تشریحی به سوالات



سوالات چند گزینه ای



مؤلف :

حبیب هاشمی

۱۳۹۶

جهت تهیه جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضی تالیف حبیب هاشمی کارشناس ارشد ریاضی کاربردی با هیجده سال سابقه تدریس در برگزاری کلاس های کنکور؛ دبیر رسمی آموزش و پرورش منطقه ۴ تهران و مدرس دانشگاه با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس بگیرید و یا به آیدی تلگرام @habib\_hashemi پیام دهید.

اینستاگرام: [academy.riazi](https://www.instagram.com/academy.riazi)

سایت ریاضیکده [www.riazikade.ir](http://www.riazikade.ir)

جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبیب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

تدریس خصوصی و مبحثی ریاضیات

متوسطه

و

تضمینی کنکور

تهران و کرج

## مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب کتاب درسی، مبحث «مقاطع مخروطی» نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.

۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.

۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.

۴- در این کتاب با نگاهی عمیق تر و جامع تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.

۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.

۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.

۷- توجه به دانش قبلی دانش آموزان.

۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.

در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

حبیب هاشمی

### فهرست مطالب

صفحه	فهرست
	<b>دایره</b>
	<b>۸</b>
۹.....	۱,۱ تعریف و معادله دایره.....
۱۱.....	۱,۲ مرکز و شعاع در معادله گسترده دایره.....
.....	۱,۳ نوشتن معادله دایره در حالت های مختلف.....
	<b>۲۲</b>
۲۲.....	۱,۳,۱ نوشتن معادله دایره با داشتن سه نقطه از آن.....
۲۵.....	۱,۳,۲ نوشتن معادله دایره با داشتن دو نقطه از دایره و یک رابطه بین $\alpha$ و $\beta$ .....
۲۹.....	۱,۳,۳ نوشتن معادله دایره با داشتن مرکز دایره و خط مماس بر دایره.....
۳۶.....	۱,۳,۴ نوشتن معادله دایره مماس بر محورهای مختصات.....
۴۰.....	۱,۳,۵ نوشتن معادله دایره مماس بر نیمسازها.....
۴۱.....	۱,۴ وضعیت دو دایره نسبت به هم.....
.....	۱,۵ وتر مشترک دو دایره.....
	<b>۴۶</b>
۴۸ .....	۲ بیضی و ویژگی های آن.....

www.riazikade.ir      حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱      @eshgheriazikonkour

۲,۱ تعریف بیضی ..... ۴۸

..... ۲,۱,۱ ویژگی های بیضی

..... ۲,۱,۲ خروج از مرکز بیضی

..... ۲,۱,۳ معادله بیضی

..... ۲,۱,۴ معادله گسترده بیضی و استاندارد کردن آن

..... ۲,۲ وتر کانونی بیضی

..... ۲,۳ معادله پارامتری بیضی

..... ۲,۳,۱ معادله خطوط مماس در رئوس بیضی

### ..... ۳ هذلولی و ویژگی های آن

..... ۳,۱ تعریف و معادله هذلولی

..... ۳,۱,۱ خروج از مرکز هذلولی

..... ۳,۱,۲ معادله گسترده هذلولی

..... ۳,۱,۳ معادله های هذلولی

..... ۳,۱,۴ مساحت مستطیلی هذلولی

..... ۳,۱,۵ فاصله کانون از خطوط مجانب

..... ۳,۱,۶ فاصله رئوس از خطوط مجانب

..... ۳,۲ وتر کانونی در هذلولی

..... ۳,۳ معادله مماس در رأس هاس هذلولی

www.riazikade.ir      حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱      @eshgheriazikonkour

..... ۳,۳,۱ هذلولی متساوی القطرین

..... ۴ سهمی

..... ۴,۱ تعریف و معادله سهمی

..... ۴,۱,۱ معادله گسترده سهمی

..... ۴,۲ ویژگی بازتابندگی سهمی ها

..... ۴,۳ وتر کانونی سهمی

..... ۱۵۶ منابع

www.riazikade.ir    حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱    @eshgheriazikonkour

موفق بودن در ریاضی ادرصد استعداد و ۹۹ درصد پشتکار

## تدریس خصوصی ریاضیات

متوسطه اول و متوسطه دوم

کنکور - تقویتی

گروهی / انفرادی

به صورت تخصصی و کاملا مفهومی با جزوه اختصاصی

مشاهده جزوات در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

دبیر رسمی آموزش و پرورش با ۱۸ سال سابقه تدریس

کارشناس ارشد ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

مؤلف شش کتاب در زمینه کنکور

نویسنده برتر استان

معلم نمونه شهرستان و استان

نفر اول استان در جشنواره الگوهای برتر تدریس

نفر اول کشور در جشنواره الگوهای برتر تدریس

شماره تماس: ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱



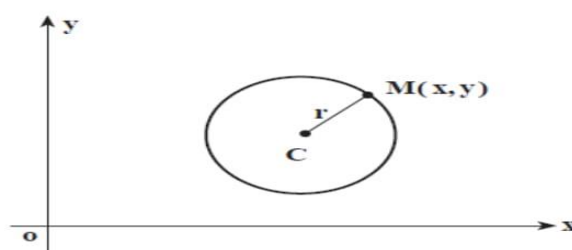
www.riazikade.ir      حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱      @eshgheriazikonkour

## ادایره

نمودار معادلات درجه دوم از  $X$  و  $Y$  را منحنی های درجه دوم می نامند. این منحنی ها از برخورد یک صفحه با یک مخروط دوار نیز قابل به دست آوردن هستند، و به همین علت آن ها را مقاطع مخروطی نیز می نامند.

### ۱,۱ تعریف و معادله دایره

**تعریف:** دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله آن ها از یک نقطه ثابت مفروض در صفحه، مقداری ثابت است. نقطه ثابت را مرکز و مقدار ثابت را شعاع دایره می نامند.



**معادله دایره:** معادله استاندارد دایره ای به مرکز  $O = (\alpha, \beta)$  و به شعاع  $r$  به صورت  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$  نوشته می شود. در حالت خاص اگر مرکز دایره مبدأ مختصات باشد معادله دایره به صورت  $x^2 + y^2 = r^2$  می باشد.

**مثال ۱:** معادله دایره ای به مبدأ مختصات که از نقطه  $A = (۳, ۴)$  بگذرد را بنویسید.

حل:

$$R^2 = ۳^2 + ۴^2 = ۲۵ \rightarrow x^2 + y^2 = ۲۵$$

www.riazikade.ir      حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱      @eshgheriazikonkour

**مثال ۲:** معادله دایره ای به مرکز  $O = (۲, ۳)$  که از نقطه  $A = (۱, ۱)$  بگذرد را بنویسید.

حل:

$$(۱ - ۲)^۲ + (۱ - ۳)^۲ = ۱ + ۴ = ۵ \rightarrow (x - ۲)^۲ + (y - ۳)^۲ = ۵$$

**نکته ۱:** اگر  $B = (x_۲, y_۲), A = (x_۱, y_۱)$  مختصات دو سر یک پاره خط باشند آنگاه مختصات وسط پاره خط  $M$  از رابطه  $M = \left(\frac{x_۱+x_۲}{۲}, \frac{y_۱+y_۲}{۲}\right)$  به دست می آید. و فاصله دو نقطه  $A$  و  $B$  نیز از رابطه زیر به دست می آید.

$$AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

**مثال ۳:** معادله دایره ای را بنویسید به طوری که نقاط  $B = (۴, -۱), A = (۲, ۵)$  دو سر قطر آن می باشند.

**حل:** قطر بزرگ ترین وتر دایره است، مرکز دایره وسط قطر می باشد بنابراین مرکز دایره برابر است با:

$$O = \left(\frac{۴+۲}{۲}, \frac{-۱+۵}{۲}\right) = (۳, ۲)$$

نصف فاصله دو نقطه  $A$  و  $B$  برابر با شعاع می باشد، بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$r = \frac{\sqrt{(۴-۲)^۲ + (-۱-۵)^۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۴+۳۶}}{۲} = \frac{\sqrt{۴۰}}{۲}$$

معادله دایره:  $(x - \alpha)^۲ + (y - \beta)^۲ = r^۲$

$$(x - ۳)^۲ + (y - ۲)^۲ = \left(\frac{\sqrt{۴۰}}{۲}\right)^۲ = \frac{۴۰}{۴} = ۱۰$$

## ۱,۲ مرکز و شعاع در معادله گسترده دایره

معادله گسترده دایره: در دایره به معادله

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

همواره ضریب  $x^2$  و  $y^2$  باید برابر یک باشد و

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}, O = \left( \frac{-a}{2}, \frac{-b}{2} \right)$$

به ترتیب مرکز و شعاع دایره می باشند.

**مثال ۴:** شعاع دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$  چقدر است؟

حل:  $r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$

$$\rightarrow r = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (4)^2 - 4(1)} = \frac{1}{2} \sqrt{16} = 2$$

**مثال ۵:** اگر شعاع دایره به معادله  $x^2 + y^2 + 4x + 6y + k = 0$  برابر ۲ باشد  $k$  را به دست آورید.

حل:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \rightarrow 2 = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 6^2 - 4k}$$

$$\rightarrow 4 = \sqrt{52 - 4k} \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می رسانیم.}} 16 = 52 - 4k$$

$$\rightarrow 4k = 52 - 16 = 36 \rightarrow k = \frac{36}{4} = 9$$

www.riazikade.ir    حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱    @eshgheriazikonkour

نکته ۲: در معادله  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  داریم:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 4c > 0 \rightarrow \text{دایره} \\ a^2 + b^2 - 4c = 0 \rightarrow \text{نقطه} \\ a^2 + b^2 - 4c < 0 \rightarrow \text{تهی} \end{cases} \text{ اگر}$$

**مثال ۶:** به ازای کدام مقدار  $m$ ، نمودار  $2x^2 + 2y^2 + 2mx + 4y + 8 = 0$  یک دایره است؟

حل: ابتدا طرفین را بر ۲ تقسیم می کنیم.

$$2x^2 + 2y^2 + 2mx + 4y + 8 = 0$$

$$\stackrel{\div 2}{\rightarrow} x^2 + y^2 + mx + 2y + 4 = 0$$

$$a^2 + b^2 - 4c > 0 \rightarrow m^2 + 2^2 - 4(4) > 0$$

$$\rightarrow m^2 + 4 - 16 > 0 \rightarrow m^2 - 12 > 0$$

$$m^2 = 12 \rightarrow m = \pm\sqrt{12} = \pm\sqrt{4 \times 3} = \pm 2\sqrt{3}$$

$$\rightarrow m \in (-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, \infty)$$

m	$-\infty$				$\infty$
	$-2\sqrt{3}$		$2\sqrt{3}$		
$m^2 - 12$	+	○	-	○	+
	جواب				جواب

نکته ۳: مقطع مخروطی به معادله  $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$  دایره است. هرگاه  $A = B$  (ضریب توان دوم ها با هم برابر باشد).

www.riazikade.ir      حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱      @eshgheriazikonkour

**مثال ۷:** به ازای کدام مقدار  $k$  معادله  $(k-2)x^2 + (6-k)(y+1)^2 = 18$  یک دایره را مشخص می کند؟

حل:

$$(k-2)x^2 + (6-k)(y+1)^2 = 18$$

$$\rightarrow (k-2)x^2 + (6-k)(y^2 + 2y + 1) - 18 = 0$$

$$(k-2)x^2 + (6-k)y^2 + (12-2k)y + 6-k-18 = 0$$

طبق نکته ۳ داریم:

$$(k-2) = (6-k) \rightarrow 2k = 8 \rightarrow k = \frac{8}{2} = 4$$

**تست ۱:** رابطه ی  $(m-1)x^2 + (2m-3)y^2 = k^2 + 1$  معادله دایره است اگر:

$$m, k \in R \quad (4) \quad m, k > 0 \quad (3) \quad m = 2, k = 1 \quad (2) \quad m = 2, k \in R \quad (1)$$

حل: گزینه ۱

$$(m-1) = (2m-3) \rightarrow -1+3 = 2m-m \rightarrow 2 = m$$

$$(m-1)x^2 + (2m-3)y^2 = k^2 + 1$$

$$\xrightarrow{m=2} (2-1)x^2 + (2(2)-3)y^2 = k^2 + 1 \rightarrow x^2 + y^2 = k^2 + 1$$

$$r^2 = k^2 + 1 \rightarrow r = \sqrt{k^2 + 1} \rightarrow k^2 + 1 > 0 \rightarrow k \in R$$

**تست ۲:** به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$  منحنی به معادله

$$2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 4y + a = 0$$

یک دایره است؟ (سراسری تجربی ۸۵ خارج از کشور)

$$\emptyset \quad (4) \quad \{3, -3\} \quad (3) \quad \{3\} \quad (2) \quad \{-3\} \quad (1)$$

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

حل: گزینه ۱

$$r = a^2 - 7 \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = \pm 3$$

$$a = 3 \rightarrow 2x^2 + (3^2 - 7)y^2 + 4y + 3 = 0$$

$$\rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y + 3 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 + 2y + \frac{3}{2} = 0$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 2^2 - 4 \left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{2} \sqrt{4 - 6} = \frac{1}{2} \sqrt{-2} \quad \text{غیر قابل قبول}$$

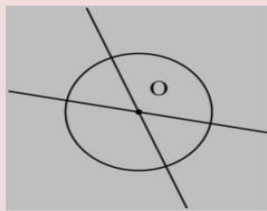
$$a = -3 \rightarrow 2x^2 + ((-3)^2 - 7)y^2 + 4y - 3 = 0$$

$$\rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 + 2y - \frac{3}{2} = 0$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 2^2 - 4 \left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 6} = \frac{1}{2} \sqrt{10} \quad \text{قابل قبول}$$

نکته ۴: محورهای تقارن دایره همان قطرهای دایره هستند. بنابراین نقطه های تقاطع آن ها مرکز دایره است.



مثال ۸: اگر دو خط  $x - y = 3$  و  $2x + y = -6$  محورهای تقارن دایره به معادله  $2x^2 + 2y^2 + mx - ny - 38 = 0$  باشند حاصل  $m + n$  را به دست آورید.

www.riazikade.ir      حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱      @eshgheriazikonkour

حل: طبق نکته ی ۴ محل تقاطع دو خط مرکز دایره است.

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = -6 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{روش حذفی} \\ \xrightarrow{\quad} 3x + 0 = -3 \end{array} \rightarrow x = \frac{-3}{3} = -1 \rightarrow \alpha = -1 \quad (1)$$

$$x - y = 3 \xrightarrow{x=-1} -1 - y = 3 \rightarrow -1 - 3 = y$$

$$\rightarrow y = -4 \rightarrow \beta = -4 \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow O = (-1, -4)$$

$$2x^2 + 2y^2 + mx - ny - 38 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 + \frac{m}{2}x - \frac{n}{2}y - 19 = 0$$

در معادله گسترده دایره داریم  $O = \left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right)$  در نتیجه مرکز دایره به صورت زیر است

$$O = \left(\frac{-\frac{m}{2}}{2}, \frac{-\frac{-n}{2}}{2}\right) = \left(\frac{-m}{4}, \frac{n}{4}\right) = (-1, -4)$$

$$\begin{cases} \frac{-m}{4} = -1 \rightarrow -m = -4 \rightarrow \boxed{m = 4} \\ \frac{n}{4} = -4 \rightarrow \boxed{n = -16} \end{cases}$$

$$m + n = 4 + (-16) = 4 - 16 = -12$$

**مثال ۹:** دو قطر دایره ای خطوط  $x - y = 0$  و  $2x + y = 3$  می باشد. مرکز این دایره را به دست آورید.

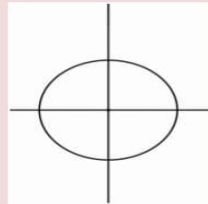
حل: محل تقاطع دو قطر مرکز دایره است.

www.riazikade.ir      حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱      @eshgheriazikonkour

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{روش حذفی} \\ \xrightarrow{\quad} 3x + 0 = 3 \rightarrow x = \frac{3}{3} = 1 \rightarrow \alpha = 1 \end{array} \quad (1)$$

$$x - y = 0 \xrightarrow{x=1} 1 - y = 0 \rightarrow 1 = y \rightarrow \beta = 1 \quad (2) \xrightarrow{(1),(2)} O = (1,1)$$

نکته ۵: خطوط قائم بر دایره همان قطرهای دایره هستند، پس خطوط قائم بر دایره از مرکز دایره می گذرند.



**مثال ۱۰:** تمام خطوطی که با دایره  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$  زاویه  $90^\circ$  می سازند و از نقطه  $A$  ثابت می گذرند  $A$  را به دست آورید.

**حل:**  $A$  همان مرکز دایره است.

$$A = \left( \frac{-a}{2}, \frac{-b}{2} \right) = \left( \frac{-(-2)}{2}, \frac{-4}{2} \right) = (1, -2)$$

**مثال ۱۱:** به ازای کدام مقدار  $a$  قائم های بر منحنی به معادله

$$2x^2 + (a - 1)y^2 - 3x + 4y = 0$$

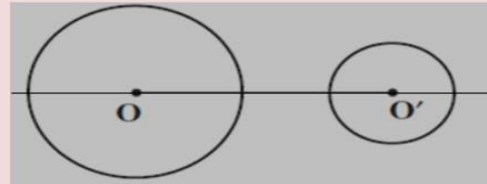
همواره از نقطه ثابتی می گذرند؟

**حل:** طبق نکته ۵ این معادله باید یک معادله دایره باشد، خطوط عمود بر آن از مرکز (نقطه  $A$  ثابت) می گذرند.

$$2 = a - 1 \rightarrow a = 2 + 1 \rightarrow a = 3$$



نکته ۶: خط عمود بر دایره، همان خط المرکزین است.



تست ۳: کدام خط بر دو دایره ی  $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$  و

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$$
 عمود است؟

$$x = 0 \quad (۴) \quad y = 0 \quad (۳) \quad x + y = 0 \quad (۲) \quad y - x = 0 \quad (۱)$$

حل: گزینه ۲

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, O = \left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right) \quad \text{روش اول:}$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0 \rightarrow O_1 = \left(\frac{-2}{2}, \frac{-(-2)}{2}\right) = (-1, 1)$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \rightarrow O_2 = \left(\frac{-(-2)}{2}, \frac{-2}{2}\right) = (1, -1)$$

گزینه ای درست است که مختصات  $O_1$  و  $O_2$  در آن صدق کند.

روش دوم: با داشتن مختصات  $O_1$  و  $O_2$ ، معادله خط از فرمول زیر بدست می آید.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, y - y_1 = m(x - x_1)$$

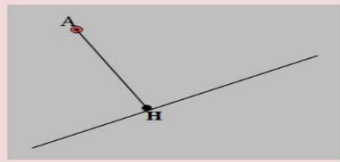
$$O_1 = (-1, 1), O_2 = (1, -1) \rightarrow m = \frac{-1 - 1}{1 - (-1)} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y - 1 = -1(x - (-1)) \rightarrow y = 1 - x - 1$$

www.riazikade.ir      حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱      @eshgheriazikonkour

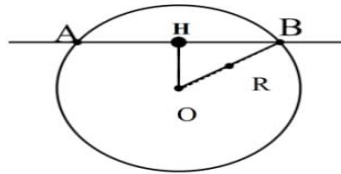
$$\rightarrow y = -x \rightarrow y + x = 0$$

نکته ۷: فاصله ی نقطه ی  $A = (x_1, y_1)$  از خط  $d$  به معادله  $ax + by + c = 0$  از فرمول  $AH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  به دست می آید.



**مثال ۱۲:** طول پاره خطی که دایره ی  $x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8$  از خط  $5x + 12y = 14$  جدا می کند را به دست آورید.

حل:



$$x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$$

$$O = \left( \frac{-(-2)}{2}, \frac{-(-8)}{2} \right) = (1, 4)$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-8)^2 - 4(-8)} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 64 + 32}$$

$$\rightarrow R = \frac{1}{2} \sqrt{100} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\left\{ \begin{array}{l} O = (1, 4), 5x + 12y = 14 \rightarrow 5x + 12y - 14 = 0 \\ OH = \frac{|5(1) + 12(4) - 14|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|5 + 48 - 14|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{|39|}{\sqrt{169}} = \frac{39}{13} = 3 \end{array} \right.$$

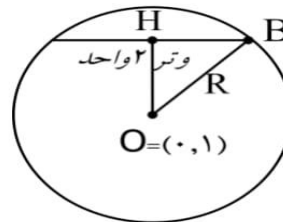
www.riazikade.ir      حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱      @eshgheriazikonkour

فیثاغورس  $\rightarrow HB^2 = R^2 - OH^2 \rightarrow HB = \sqrt{R^2 - OH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2}$

$$HB = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \rightarrow AB = 2HB = 2 \times 4 = 8$$

**مثال ۱۳:** معادله دایره ای به مرکز  $O = (0, 1)$  که از خط  $y = 3$  و تری به طول ۲ جدا می کند را به دست آورید.

حل: شکل فرضی



$$\begin{cases} O = (0, 1), y = 3 \rightarrow 0 \cdot x + y - 3 = 0 \\ OH = \frac{|0 \cdot (0) + 1(1) - 3|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|1 - 3|}{\sqrt{1}} = \frac{2}{1} = 2 \end{cases}$$

فیثاغورس  $\rightarrow R^2 = OH^2 + HB^2 \rightarrow R = \sqrt{OH^2 + HB^2} = \sqrt{2^2 + 4^2}$

$$R = \sqrt{4 + 16} \rightarrow \boxed{R = \sqrt{20}}$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 20 \rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 2y = 19}$$

$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{20})^2$$

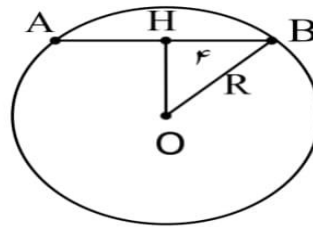
**مثال ۱۴:** دایره ی  $x^2 + y^2 - 2x - 8y + m = 0$  از خط  $5x + 12y = 14$  و تری به طول ۸ جدا می کند  $m$  را به دست آورید.

حل: با توجه به شکل زیر فاصله مرکز دایره تا خط را به دست می آوریم.

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir



$$AB = 8 \rightarrow HB = 4$$

$$O = \left( \frac{-(-2)}{2}, \frac{-(-8)}{2} \right) = (1, 4), \quad 5x + 12y = 14$$

$$\rightarrow 5x + 12y - 14 = 0$$

$$OH = \frac{|\ 5(1) + 12(4) - 14 \ |}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|\ 5 + 48 - 14 \ |}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{|\ 39 \ |}{\sqrt{169}} = \frac{39}{13} = 3$$

فیثاغورس  $\rightarrow R^2 = OH^2 + HB^2 \rightarrow R = \sqrt{OH^2 + HB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2}$

$$R = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \rightarrow \boxed{R = 5}$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-8)^2 - 4(m)} \rightarrow 5 \times 2 = \sqrt{68 - 4m}$$

$$\rightarrow 100 = 68 - 4m \rightarrow 32 = -4m \rightarrow m = \frac{32}{-4} = -8 \rightarrow \boxed{m = -8}$$

**مثال ۱۵:** معادله مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله ی آن ها از نقطه ی  $(-2, 1)$  نصف فاصله ی آن ها از نقطه ی  $(4, -2)$  باشد را به دست آورید.

حل: اگر  $M(x, y)$  یک نقطه از مکان هندسی باشد آنگاه

$$M(x, y), A(-2, 1), B(4, -2) \rightarrow |MA| = \frac{1}{2} |MB|$$

$$\rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(x-4)^2 + (y+2)^2}$$

www.riazikade.ir      حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱      @eshgheriazikonkour

$$\rightarrow 2\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y+2)^2}$$

طرفین را به توان ۲ می رسانیم.

$$\rightarrow 4(x+2)^2 + 4(y-1)^2 = (x-4)^2 + (y+2)^2$$

$$4x^2 + 16x + 16 + 4y^2 - 8y + 4 = x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4$$

$$\rightarrow 3x^2 + 24x + 3y^2 - 12y = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + 8x - 4y = 0$$

**مثال ۱۶:** فاصله ی نقطه متحرک  $M(x, y)$  از نقطه  $A(1, 3)$  ، با اندازه ی  $\sqrt{2}$  برابر فاصله ی  $M$  تا نقطه ی  $B(-2, 4)$  است. شعاع دایره مسیر حرکت  $M$  را به دست آورید.

حل:

$$|MA| = \sqrt{2}|MB|$$

$$\rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{2}\sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2}$$

طرفین را به توان ۲ می رسانیم.

$$\rightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = 2(x+2)^2 + 2(y-4)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 2x^2 + 8x + 8 + 2y^2 - 16y + 32$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + 10x - 10y + 30 = 0$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{(10)^2 + (-10)^2 - 4(30)} = \frac{1}{2}\sqrt{100 + 100 - 120}$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{80} = \frac{1}{2}4\sqrt{5} \rightarrow \boxed{R = 2\sqrt{5}}$$

www.riazikade.ir      حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱      @eshgheriazikonkour

### ۱,۳ نوشتن معادله دایره در حالت های مختلف

- ۱- نوشتن معادله دایره با داشتن سه نقطه از آن
- ۲- نوشتن معادله دایره با داشتن دو نقطه از دایره و یک رابطه بین  $\beta$  و  $\alpha$  مختصات مرکز دایره هستند.
- ۳- نوشتن معادله دایره با داشتن مرکز و یک خط مماس بر دایره
 

حالت های خاص	{	مماس بر محور $x$ ها
		مماس بر محور $y$ ها
- ۴- نوشتن معادله دایره مماس بر محورهای مختصات
- ۵- نوشتن معادله دایره مماس بر نیمسازهای اول و دوم-دوم و سوم-سوم و چهارم-اول و چهارم

### ۱,۳,۱ نوشتن معادله دایره با داشتن سه نقطه از آن

برای به دست آوردن معادله دایره ای که از سه نقطه  $A$  و  $B$  و  $C$  می گذرد معادله دایره به صورت  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  در نظر گرفته، سپس مختصات نقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  را در معادله قرار داده از حل معادلات به دست آمده  $a, b, c$  را به دست می آوریم.

**تست ۴:** شعاع دایره ای که از سه نقطه  $A = (2, 1)$  و  $B = (0, -1)$  و  $O = (0, 0)$  می گذرد چه قدر است؟

$$\sqrt{10} \quad (1) \quad \frac{\sqrt{10}}{2} \quad (2) \quad 10 \quad (3) \quad 5 \quad (4) \quad 5 \quad (5)$$

حل: گزینه ۲

$$O = (0, 0) \rightarrow 0^2 + 0^2 + 0 + 0 + c = 0 \rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$B = (0, -1) \rightarrow 0^2 + (-1)^2 + 0a - 1b = 0$$

$$\rightarrow -b = -1 \rightarrow \boxed{b = 1}$$

www.riazikade.ir      حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱      @eshgheriazikonkour

$$A = (2, 1) \rightarrow 2^2 + 1^2 + 2a + b = 0 \rightarrow 2a + b = -5$$

$$\begin{matrix} b=1 \\ \rightarrow 2a + 1 = -5 \rightarrow 2a = -6 \rightarrow a = -3 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله دایره}} x^2 + y^2 - 3x + y = 0 \rightarrow R = \frac{1}{2} \sqrt{(-3)^2 + (1)^2 - 4(0)}$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 1} = \frac{1}{2} \sqrt{10}$$

**مثال ۱۷:** معادله دایره ای را بنویسید که از مبدا مختصات گذشته و محور  $x$ ها را در نقطه ای به طول  $(-2)$  و محور  $y$ ها را در نقطه ای به عرض  $(1)$  قطع می کند.

حل:

$$O = (0, 0) \rightarrow 0^2 + 0^2 + 0 + 0 + c = 0 \rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$B = (-2, 0) \rightarrow (-2)^2 + 0^2 - 2a + (0)b = 0$$

$$\rightarrow -2a = -4 \rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$A = (0, 1) \rightarrow 0^2 + 1^2 + 0a + b = 0 \rightarrow \boxed{b = -1}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله دایره}} x^2 + y^2 + 2x - y = 0$$

**تست ۵:** شعاع دایره ای که از سه نقطه  $(2, 1)$  و  $(-2, 4)$  و  $(0, 0)$  می گذرد کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

۲,۵ (۴)

۳ (۳)

۲,۵ (۲)

۲ (۱)

حل: گزینه ۲

$$(0, 0) \rightarrow 0^2 + 0^2 + 0 + 0 + c = 0 \rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$(-2, 4) \rightarrow (-2)^2 + 4^2 - 2a + 4b = 0 \rightarrow -2a + 4b = -20 \quad (1)$$

$$(2, 1) \rightarrow 2^2 + 1^2 + 2a + b = 0 \rightarrow 2a + b = -5 \quad (2)$$

مبحث : جزوه فصل پنجم ریاضی پیش دانشگاهی تجربی مقاطع مخروطی

www.riazikade.ir حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ @eshgheriazikonkour

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \Delta b = -۲۵ \rightarrow \boxed{b = -۵} \rightarrow \boxed{a = ۰}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله دایره}} x^2 + y^2 - ۵y = ۰$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{۰^2 + (-۵)^2 - ۴(۰)} = \frac{1}{2} \sqrt{۲۵} = \frac{۵}{۲} = ۲.۵ \rightarrow \boxed{R = ۲.۵}$$

**تست ۶:** شعاع دایره ی گذاری سه نقطه ی  $(۲, ۱)$  و  $(۱, -۲)$  و  $(۰, ۰)$  برابر کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۳)

$$\frac{1}{2} \sqrt{۱۳} (۴) \quad \sqrt{۵} (۳) \quad \sqrt{۳} (۲) \quad \frac{1}{2} \sqrt{۱۰} (۱)$$

حل: گزینه ۱

$$(۰, ۰) \rightarrow ۰^2 + ۰^2 + ۰ + ۰ + c = ۰ \rightarrow \boxed{c = ۰}$$

$$(۱, -۲) \rightarrow (۱)^2 + (-۲)^2 + a - ۲b = ۰ \rightarrow a - ۲b = -۵$$

$$\rightarrow a = ۲b - ۵ \quad (۱)$$

$$(۲, ۱) \rightarrow ۲^2 + ۱^2 + ۲a + b = ۰ \rightarrow ۲a + b = -۵$$

$$\xrightarrow{(۱)} ۲(۲b - ۵) + b = -۵ \rightarrow ۵b = ۵ \rightarrow \boxed{b = ۱}$$

$$a = ۲b - ۵ \xrightarrow{b=۱} a = ۲(۲) - ۵ \rightarrow \boxed{a = -۳}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله دایره}} x^2 + y^2 - ۳x + y = ۰$$

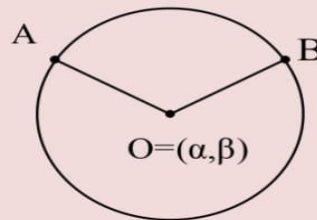
$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(-۳)^2 + (۱)^2 - ۴(۰)} = \frac{1}{2} \sqrt{۱۰} \rightarrow \boxed{R = \frac{1}{2} \sqrt{۱۰}}$$



### ۱,۳,۲ نوشتن معادله دایره با داشتن دو نقطه از دایره و یک رابطه بین $\alpha$ و $\beta$

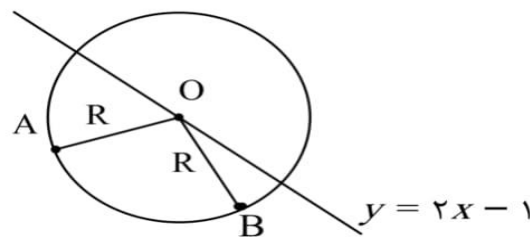
با توجه به اینکه فاصله ی مرکز دایره از هر نقطه ی دایره برابر شعاع دایره است. فاصله مرکز دایره از نقاط را به دست می آوریم و مساوی هم قرار می دهیم.

$$|OA|=|OB|$$



**مثال ۱۸:** شعاع دایره ای که از دو نقطه  $A = (1, 2)$  ,  $B(3, 0)$  گذشته و مرکز تقارن آن روی خط به معادله  $y = 2x - 1$  باشد را به دست آورید.  
حل: طول مرکز را  $\alpha$  و عرض مرکز را  $\beta = 2\alpha - 1$  می گیریم.

$$(y = 2x - 1 \xrightarrow{(\alpha, \beta)} \beta = 2\alpha - 1)$$



$$OA = OB$$

$$OA = \sqrt{(1 - \alpha)^2 + (2 - (2\alpha - 1))^2} = \sqrt{(1 - \alpha)^2 + (3 - 2\alpha)^2}$$

$$OB = \sqrt{(3 - \alpha)^2 + (0 - (2\alpha - 1))^2} = \sqrt{(3 - \alpha)^2 + (2\alpha - 1)^2}$$

www.riazikade.ir      حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱      @eshgheriazikonkour

$$|OA| = |OB|$$

$$\rightarrow 1 - 2\alpha + \alpha^2 + 9 - 12\alpha + 4\alpha^2 = 9 - 6\alpha + \alpha^2 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 1$$

$$4\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 0, R = \sqrt{(3 - \alpha)^2 + (2\alpha - 1)^2}$$

$$R = \sqrt{(3 - 0)^2 + (2(0) - 1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

**تست ۷:** دایره ای از دو نقطه  $A = (0, 1)$ ,  $B = (3, 0)$  گذشته و معادله یک قطر آن به صورت  $x - y = 2$  است. شعاع این دایره کدام است؟

$$3(4) \quad \sqrt{5} (3) \quad 2(2) \quad \sqrt{2}(1)$$

حل: گزینه ۳

$$x - y = 2 \xrightarrow{(\alpha, \beta)} \alpha - \beta = 2 \rightarrow \beta = \alpha - 2$$

$$\rightarrow O = (\alpha, \alpha - 2) \text{ و } |OA| = |OB|$$

$$\sqrt{(0 - \alpha)^2 + (1 - (\alpha - 2))^2} = \sqrt{(3 - \alpha)^2 + (0 - (\alpha - 2))^2}$$

$$\rightarrow \sqrt{\alpha^2 + (3 - \alpha)^2} = \sqrt{(3 - \alpha)^2 + (\alpha - 2)^2}$$

$$\alpha^2 + 9 - 6\alpha + \alpha^2 = 9 - 6\alpha + \alpha^2 + \alpha^2 - 4\alpha + 4$$

$$\rightarrow 0 = 4 - 4\alpha \rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

$$R = \sqrt{\alpha^2 + (3 - \alpha)^2} = \sqrt{1^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$$

**تست ۸:** نقطه ی  $(a, 2a)$  مرکز دایره ی گذرنده از دو نقطه ی  $(2, 1)$ ,  $(-1, 4)$  است شعاع دایره کدام است؟ (سراسری تجربی)

$$4(4) \quad 3(3) \quad 2(2) \quad 1(1)$$

حل: گزینه ۳

مبحث : جزوه فصل پنجم ریاضی پیش دانشگاهی تجربی مقاطع مخروطی

www.riazikade.ir حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ @eshgheriazikonkour

$$O = (a, 2a) , A = (2, 1) , B = (-1, 4) , |OA| = |OB|$$

$$\rightarrow \sqrt{(2-a)^2 + (1-2a)^2} = \sqrt{(-1-a)^2 + (4-2a)^2}$$

$$4 - 4a + a^2 + 1 - 4a + 4a^2 = 1 + 2a + a^2 + 16 - 16a + 4a^2$$

$$\rightarrow 6a = 12 \rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$R = \sqrt{(2-a)^2 + (1-2a)^2} = \sqrt{(2-2)^2 + (1-2(2))^2}$$

$$R = \sqrt{0 + 9} = 3 \rightarrow \boxed{R = 3}$$

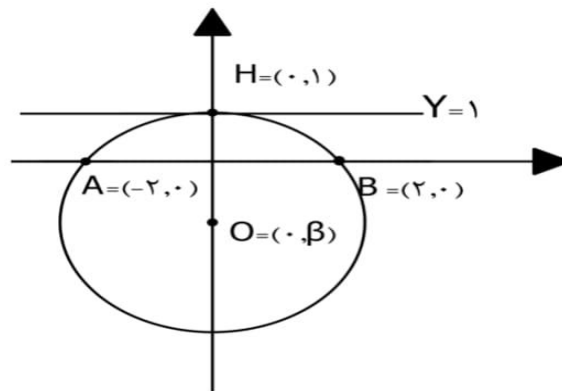
**تست ۹:** دایره ای از دو نقطه  $(2, 0)$  و  $(-2, 0)$  گذشته و بر خط  $y = 1$  مماس است.

شعاع این دایره کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۸ خارج از کشور)

$$\frac{5}{2} \quad (1) \qquad 5 \quad (2) \qquad 6 \quad (3) \qquad \frac{3}{2} \quad (4)$$

حل: گزینه ۱

طبق شکل زیر مرکز دایره روی عمود منصف پاره خط  $AB$  یعنی محور  $y$  ها قرار دارد پس مختصات مرکز دایره  $(0, \beta)$  است.



$$OA = OH \rightarrow \sqrt{(-2-0)^2 + (0-\beta)^2} = \sqrt{(0-0)^2 + (\beta-1)^2}$$

www.riazikade.ir      حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱      @eshgheriazikonkour

$$\rightarrow \sqrt{4 + \beta^2} = \sqrt{\beta^2 - 2\beta + 1}$$

$$4 + \beta^2 = \beta^2 - 2\beta + 1 \rightarrow 2\beta = 1 - 4 = -3 \rightarrow \boxed{\beta = \frac{-3}{2}}$$

$$R = OH = \sqrt{(\beta - 1)^2} = \sqrt{\left(\frac{-3}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2} = \left|\frac{-5}{2}\right| = \frac{5}{2}$$

**تست ۱۰:** دایره ای محور  $x$ ها را در دو نقطه به طول های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۵ خارج از کشور)

$$\sqrt{3} \quad (1) \qquad 3 \quad (2) \qquad \sqrt{5} \quad (3) \qquad 3(4)$$

حل: گزینه ۳

مرکز در ربع اول:  $O = (\alpha, \alpha) \rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = R^2$   
 $y = x$

$$A = (1, 0), B = (3, 0)$$

$$\rightarrow \begin{cases} (1 - \alpha)^2 + (0 - \alpha)^2 = R^2 \\ (3 - \alpha)^2 + (0 - \alpha)^2 = R^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow (1 - \alpha)^2 + \alpha^2 = (3 - \alpha)^2 + \alpha^2 \rightarrow (1 - \alpha)^2 = (3 - \alpha)^2$$

$$\sqrt{\quad} \rightarrow |1 - \alpha| = |3 - \alpha| \rightarrow 1 - \alpha = \pm(3 - \alpha)$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 - \alpha = 3 - \alpha \rightarrow 1 = 3 \text{ غیر قابل قبول} \\ 1 - \alpha = -3 + \alpha \rightarrow 2\alpha = 4 \rightarrow \alpha = 2 \text{ قابل قبول} \end{cases}$$

$$(1 - \alpha)^2 + (0 - \alpha)^2 = R^2 \rightarrow (1 - 2)^2 + (0 - 2)^2 = R^2$$

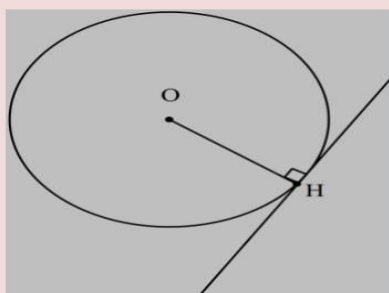
$$\rightarrow R^2 = 5 \rightarrow R = \sqrt{5}$$

www.riazikade.ir      حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱      @eshgheriazikonkour

### ۱,۳,۳ نوشتن معادله دایره با داشتن مرکز دایره و خط مماس بر دایره

با توجه به اینکه فاصله ی مرکز دایره از خط مماس بر دایره همواره برابر شعاع دایره است فاصله مرکز دایره از خط را از فرمول زیر محاسبه می کنیم.

$$\begin{cases} O = (\alpha, \beta) \\ ax + by + c = 0 \end{cases} \rightarrow OH = R = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



**مثال ۱۹:** معادله دایره ای به مبدا مختصات که بر خط  $4x + 3y = 15$  مماس باشد را بنویسید.

**حل:** معادله دایره به صورت  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$  می باشد، مرکز دایره را داریم بنابراین ابتدا شعاع را به دست می آوریم.

$$\begin{cases} O = (0, 0) \\ 4x + 3y = 15 \rightarrow 4x + 3y - 15 = 0 \end{cases}$$

$$OH = R = \frac{|4(0) + 3(0) - 15|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{15}{\sqrt{25}} = 3$$

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 3^2 \xrightarrow{\text{معادله دایره}} \boxed{x^2 + y^2 = 9}$$

**مثال ۲۰:** دایره ای به مرکز  $O = (2, -2)$  بر خط  $x + y = 8$  مماس است طول قطر این دایره را به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} O = (2, -2) \\ x + y = 8 \rightarrow x + y - 8 = 0 \end{cases}$$

$$OH = R = \frac{|1(2) + 1(-2) - 8|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|2 - 2 - 8|}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}}$$

$$R = \frac{8}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{گویا}} R = \frac{8}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \rightarrow \text{قطر} = 2R = 2 \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

**مثال ۲۱:** دو قطر دایره ای خطوط  $2x + y = 3$ ،  $x - y = 0$  می باشند اگر این دایره بر خط به معادله  $x + y = 0$  مماس باشد معادله این دایره را بنویسید.

**حل:** محل برخورد دو قطر مرکز دایره می باشد بنابراین اول از روش حذفی (جایگذاری) محل برخورد دو قطر را به دست می آوریم.

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases} \rightarrow 3x = 3 \rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$x - y = 0 \xrightarrow{x=1} 1 - y = 0 \rightarrow \boxed{y = 1} \rightarrow O = (1, 1)$$

$$\begin{cases} O = (1, 1) \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$OH = R = \frac{|1(1) + 1(1) + 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|1 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\xrightarrow{\text{گویا}} R = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} \rightarrow \boxed{R = \sqrt{2}}$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{2}^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 2 \xrightarrow{\text{معادله دایره}} x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$$

www.riazikade.ir      حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱      @eshgheriazikonkour

**مثال ۲۲:** هر خط قائم بر دایره، از نقطه ی  $(-۲, ۱)$  می گذرد این دایره بر خط به معادله ی  $y = x - ۱$  مماس است. شعاع این دایره را به دست آورید. (سراسری تجربی ۸۸)

حل:

$$\begin{cases} O = (-۲, ۱) \\ y = x - ۱ \rightarrow x - y - ۱ = ۰ \end{cases}$$

$$OH = R = \frac{|۱(-۲) - ۱(۱) - ۱|}{\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{|-۴|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۴}{\sqrt{۲}}$$

$$\xrightarrow{\text{گویا}} \frac{۴}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۴\sqrt{۲}}{۲} = ۲\sqrt{۲} \rightarrow \boxed{R = ۲\sqrt{۲}}$$

**مثال ۲۳:** معادله دایره ای بنویسید به مرکز  $(۲, ۰)$  و مماس بر نیمساز ربع اول باشد.

حل:

$$\begin{cases} O = (۲, ۰) \\ y = x \rightarrow x - y = ۰ \end{cases}$$

$$OH = R = \frac{|۱(۲) - ۱(۰) + ۰|}{\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{|۲|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}}$$

$$(x - ۲)^۲ + (y - ۰)^۲ = \left(\frac{۲}{\sqrt{۲}}\right)^۲ \rightarrow (x - ۲)^۲ + y^۲ = ۲$$

**مثال ۲۴:** دایره ای به مرکز  $(۲, ۰)$  و مماس بر نیمساز ربع اول خط به معادله  $y = ۱$  را با کدام طول قطع می کند؟ (سراسری تجربی ۸۶)

حل:

$$\begin{cases} O = (۲, ۰) \\ y = x \rightarrow x - y = ۰ \end{cases}$$

مبحث : جزوه فصل پنجم ریاضی پیش دانشگاهی تجربی مقاطع مخروطی

www.riazikade.ir حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ @eshgheriazikonkour

$$\rightarrow OH = R = \frac{|1(2) - 1(0) + 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 \rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 2$$

$$\xrightarrow{y=1} (x - 2)^2 + 1^2 = 2 \rightarrow (x - 2)^2 = 1$$

طبق خاصیت ریشه زوج  
 $\rightarrow x - 2 = \pm 1$

$$\rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \rightarrow x = 1 + 2 = 3 \rightarrow \boxed{x = 3} \\ x - 2 = -1 \rightarrow x = -1 + 2 = 1 \rightarrow \boxed{x = 1} \end{cases} \rightarrow \boxed{x = 1, 3}$$

**تست ۱۱:** دایره ای به مرکز  $(2, -1)$  و مماس بر خط به معادله  $x - y = 1$  محور  $x$  ها را با کدام طول ها قطع می کند؟ (سراسری تجربی ۹۵)

$$1.5, 4 \quad 2, 3 \quad 1, 4 \quad 1, 3 \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4)$$

حل: گزینه ۱

$$\begin{cases} O = (2, -1) \\ x - y = 1 \rightarrow x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$OH = R = \frac{|1(2) - 1(-1) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\xrightarrow{\text{گویا}} \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \xrightarrow{\text{معادله دایره}} (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = (\sqrt{2})^2$$

محل برخورد محور  $x$  ها

$$\xrightarrow{y=0} (x - 2)^2 + (0 + 1)^2 = 2 \rightarrow (x - 2)^2 = 1$$

طبق خاصیت ریشه زوج  
 $\rightarrow x - 2 = \pm 1$

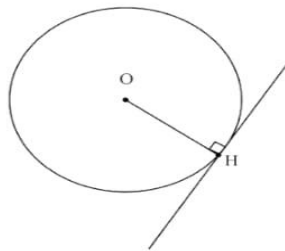


www.riazikade.ir      حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱      @eshgheriazikonkour

$$\rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \rightarrow x = 1 + 2 = 3 \rightarrow \boxed{x = 3} \\ x - 2 = -1 \rightarrow x = -1 + 2 = 1 \rightarrow \boxed{x = 1} \end{cases} \rightarrow \boxed{x = 1, 3}$$

**مثال ۲۵:** به ازای کدام مقدار  $a$ ، دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$  بر خط به معادله  $x + 3y = 0$  مماس است؟ (سراسری تجربی ۸۵)

**حل:** در صورتی خط بر دایره مماس است که فاصله ی مرکز دایره از خط برابر شعاع دایره باشد. یعنی طبق شکل زیر



$$OH = OR$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$$

$$\rightarrow (x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 + a = 0 \rightarrow O = (1, -2)$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 4^2 - 4(a)} = \frac{1}{2} \sqrt{20 - 4a}$$

$$\begin{cases} O = (1, -2) \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$OH = R = \frac{|1(1) + 3(-2) + 0|}{\sqrt{1^2 + (3)^2}} = \frac{|1 - 6|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$R = \frac{5}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{20 - 4a} \rightarrow \sqrt{10} = \sqrt{20 - 4a}$$

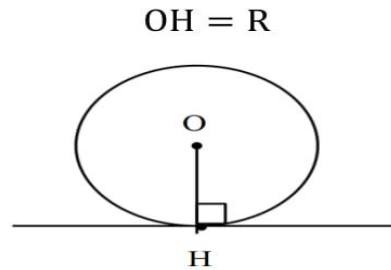
www.riazikade.ir      حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱      @eshgheriazikonkour

به توان ۲ می رسانیم.

$$10 = 20 - 4a \rightarrow 4a = 10 \rightarrow a = \frac{10}{4} \rightarrow \boxed{a = \frac{5}{2}}$$

**مثال ۲۶:** به ازای کدام مقدار  $k$ , خط  $y = k$  بر دایره  $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$  مماس است؟

حل:



$$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$$

$$(x + 1)^2 - 1 + (y - 1)^2 - 1 = 0$$

$$\rightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 \rightarrow O = (-1, 1), R = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} O = (-1, 1) \\ y = k \rightarrow y - k = 0 \end{cases}$$

$$OH = R = \frac{|1 \cdot (-1) + 1(1) - k|}{\sqrt{0^2 + (1)^2}} = \frac{|1 - k|}{\sqrt{0 + 1}} = |1 - k|$$

$$\rightarrow |1 - k| = \sqrt{2} \rightarrow \boxed{k = 1 \pm \sqrt{2}}$$

**تست ۱۲:** به ازای کدام مقدار  $m$  خط به معادله  $y = mx + 2$  بر دایره  $x^2 + y^2 - 2x = 3$  مماس است؟ (سراسری تجربی ۹۱ خارج از کشور)

(۱)  $0, \frac{-4}{3}$       (۲)  $0, \frac{4}{3}$       (۳)  $1, \frac{-2}{3}$       (۴)  $1, \frac{2}{3}$

www.riazikade.ir      حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱      @eshgheriazikonkour

حل: گزینه ۲

$$x^2 + y^2 - 2x = 3 \rightarrow (x - 1)^2 - 1 + y^2 = 3 \rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 4$$

$$\begin{cases} O = (1, 0), R = 2 \\ y = mx + 2 \rightarrow mx - y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$OH = R = \frac{|m(1) - 1(0) + 2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲ می رسانیم.}}$$

$$(m + 2)^2 = 4(m^2 + 1) \rightarrow m^2 + 4m + 4 = 4m^2 + 4$$

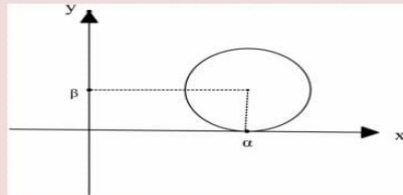
$$3m^2 - 4m = 0 \rightarrow m(3m - 4) = 0 \quad \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{4}{3} \end{cases}$$

www.riazikade.ir    حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱    @eshgheriazikonkour

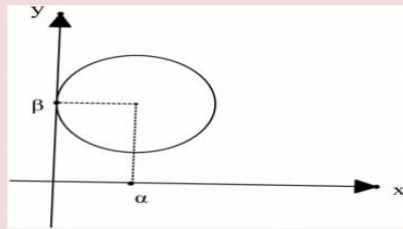
### ۱,۳,۴ نوشتن معادله دایره مماس بر محورهای مختصات

شعاع دایره ای به مرکز  $O = (\alpha, \beta)$  که بر یکی از محورهای مختصات مماس باشد برابر است با:

الف) مماس بر محور  $x$  ها  $R = |\beta|$



ب) مماس بر محور  $y$  ها  $R = |\alpha|$



**مثال ۲۷:** معادله دایره ای بنویسید به مرکز  $O = (1, -2)$  که بر محور  $x$  مماس باشد.

حل:

$$R = |\beta| \rightarrow R = |-2| = 2 \xrightarrow{\text{معادله دایره}} (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$$

**مثال ۲۸:** دایره ای به مرکز  $O = (3, 2)$  که بر محور  $y$  مماس باشد محور  $x$  را با کدام طول قطع می کند؟

حل:

$$R = |\alpha| \rightarrow R = |3| = 3 \xrightarrow{\text{معادله دایره}} (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

@eshgheriazikonkour    حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱    www.riazikade.ir

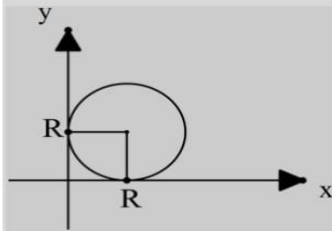
محل تلاقی با محور  $x$ ها یعنی باید  $y$  را مساوی صفر قرار دهیم.

$$(x - 3)^2 + (0 - 2)^2 = 9 \rightarrow (x - 3)^2 = 9 - 4 = 5$$

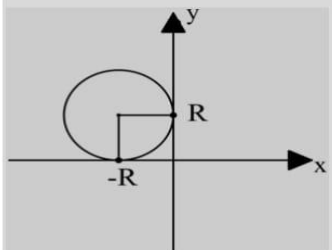
$$\rightarrow x - 3 = \pm\sqrt{5} \rightarrow \boxed{x = 3 \pm \sqrt{5}}$$

مختصات مرکز دایره های با شعاع  $R$  که بر محورهای مختصات مماس باشند عبارتند از:

الف) در ناحیه اول  $O = (R, R)$



ب) در ناحیه دوم  $O = (-R, R)$

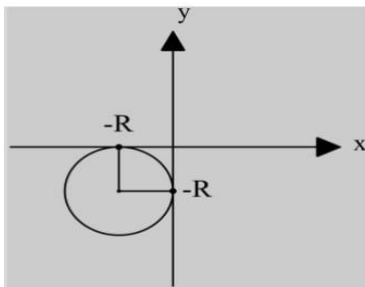


پ) در ناحیه سوم  $O = (-R, -R)$

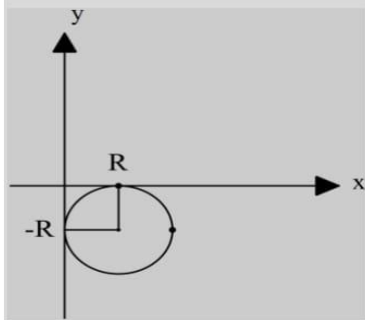
@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir



$O = (R, -R)$  (ت) در ناحیه چهارم



**مثال ۲۹:** معادله دایره ای بنویسید به شعاع ۱ که در ناحیه دوم بر محورهای مختصات مماس باشد.

حل:

$$O = (-R, R) = (-1, 1) \rightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

**مثال ۳۰:** مرکز دایره ای که در ناحیه سوم بر محورهای مختصات مماس باشد واقع بر خط  $2x + 3y = -15$  می باشد، شعاع این دایره چقدر است؟

حل:

$$O = (-R, -R)$$

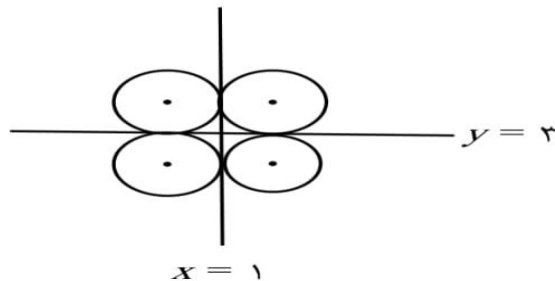
$$\rightarrow 2(-R) + 3(-R) = -15 \rightarrow -5R = -15 \rightarrow \boxed{R = 3}$$

www.riazikade.ir      حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱      @eshgheriazikonkour

**مثال ۳۱:** معادله دایره ای به شعاع ۲ که بر خطوط  $x = 1$  و  $y = 3$  مماس باشد را بنویسید.

حل:

$$O = (1 \pm R, 3 \pm R)$$



$$\rightarrow \begin{cases} O_1 = (3, 5) \rightarrow (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4 \\ O_2 = (-1, 1) \rightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4 \\ O_3 = (3, 1) \rightarrow (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4 \\ O_4 = (-1, 5) \rightarrow (x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 4 \end{cases}$$

**تست ۱۳:** دایره ای از نقطه  $(-1, 2)$  گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است قطر دایره بزرگتر کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

۱۵ (۴)      ۱۲ (۳)      ۱۰ (۲)      ۸ (۱)

حل: گزینه ۲

چون نقطه  $(-1, 2)$  در ناحیه دوم قرار دارد پس  $O = (-R, R)$  و معادله دایره به صورت  $(x + R)^2 + (y - R)^2 = R^2$  است.

$$\xrightarrow{(-1, 2)} (-1 + R)^2 + (2 - R)^2 = R^2$$

$$\rightarrow 1 - 2R + R^2 + 4 - 4R + R^2 = R^2 \rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0$$

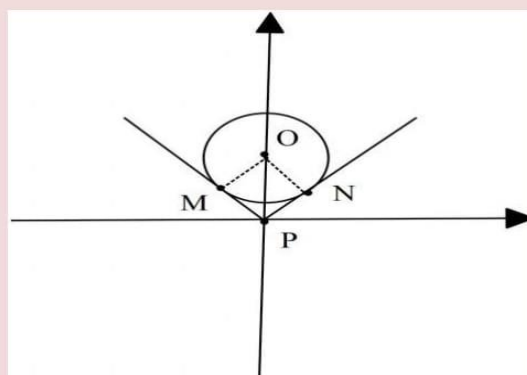
@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

### ۱,۳,۵ نوشتن معادله دایره مماس بر نیمسازها

اگر یک دایره بر نیمسازهای اول و دوم مماس باشد باید مرکز دایره حتماً روی محور  $y$  باشد.



چهارضلعی  $OMNP$  یک مربع است.

رابطه فیثاغورس

$$\rightarrow OP^2 = OM^2 + MP^2 \rightarrow OP^2 = R^2 + R^2$$

$$\rightarrow OP^2 = 2R^2 \rightarrow OP = \sqrt{2}R \xrightarrow{\text{مختصات مرکز دایره}} O = (0, \sqrt{2}R)$$

نتیجه: مختصات مرکز دایره ای به شعاع  $R$  که:

الف) مماس بر نیمساز اول و دوم باشد.  $O = (0, \sqrt{2}R)$

ب) مماس بر نیمساز دوم و سوم باشد.  $O = (-\sqrt{2}R, 0)$

پ) مماس بر نیمساز سوم و چهارم باشد.  $O = (0, -\sqrt{2}R)$

ت) مماس بر نیمساز چهارم و اول باشد.  $O = (\sqrt{2}R, 0)$

**مثال ۳۲:** مختصات مرکز دایره ای به شعاع  $2\sqrt{2}$  که بر نیمساز ناحیه اول و دوم مماس باشد را به دست آورید.



www.riazikade.ir      حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱      @eshgheriazikonkour

حل:

$$O = (0, \sqrt{2}R) \rightarrow O = (0, \sqrt{2}(2\sqrt{2})) \rightarrow \boxed{O = (0, 4)}$$

### ۱,۴ وضعیت دو دایره نسبت به هم

برای مشخص کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

۱- مرکز و شعاع هر کدام از دایره‌ها را به دست می‌آوریم.

۲- فاصله مرکز دو دایره را از فرمول  $d = OO' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  به دست می‌آوریم.

۳- شعاع دایره‌ها را یک بار از هم کم و یک بار با هم جمع می‌کنیم. (شعاع بزرگ‌تر منهای شعاع کوچک‌تر)

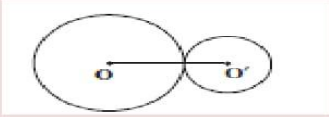

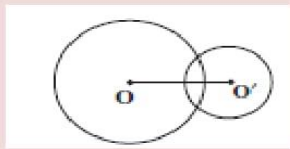

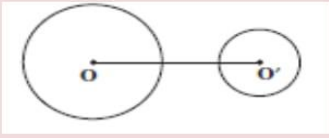
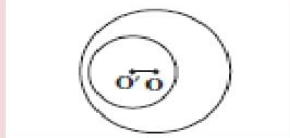
۴- با توجه به حالت‌های زیر وضعیت را مشخص می‌کنیم.

۱- اگر  $d$  با تفریق یا جمع شعاع‌ها برابر باشد مماس.

۲- اگر  $d$  بین جمع و تفریق شعاع‌ها باشد متقاطع.

۳- اگر  $d$  برابر صفر باشد هم‌مرکز.

۴- در غیر این صورت متخارج یا متداخل خواهد بود.

	$d = R + R'$	دو دایره مماس برون (مماس خارج)
	$d = R - R'$	دو دایره مماس درون (مماس داخل)
	$R - R' < d < R + R'$	دو دایره متقاطع
	$d = 0$	دو دایره هم مرکز
	$d > R + R'$	دو دایره برون هم (متخارج)
	$d < R - R'$	دو دایره متداخل

www.riazikade.ir      حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱      @eshgheriazikonkour

**مثال ۳۳:** دو دایره  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$  و  $(x-7)^2 + (y-9)^2 = 81$  نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

حل:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \rightarrow O = (1,1), R = 1$$

$$(x-7)^2 + (y-9)^2 = 81 \rightarrow O = (7,9), R = 9$$

$$OO = \sqrt{(7-1)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

$$\rightarrow \boxed{d = OO = 10}, R - \hat{R} = 9 - 1 = 8, R + \hat{R} = 9 + 1 = 10$$

چون  $d = R + \hat{R}$  پس این دو دایره مماس خارج اند.

**مثال ۳۴:** مقدار  $k$  برای آن که دو دایره  $x^2 - 2x + y^2 - 2y = k$  و  $x^2 - 8x + y^2 - 2y + 16 = 0$  بر هم مماس خارج باشند کدام است؟

حل:

$$\boxed{(1)} \quad x^2 - 2x + y^2 - 2y = k$$

$$\xrightarrow{\text{مربع کامل}} (x-1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 = k$$

$$\rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = k+2 \rightarrow O = (1,1), R = \sqrt{k+2}$$

$$\boxed{(2)} \quad x^2 - 8x + y^2 - 2y + 16 = 0$$

$$\rightarrow (x-4)^2 - 16 + (y-1)^2 - 1 + 16 = 0$$

$$\rightarrow (x-4)^2 + (y-1)^2 = 1 \rightarrow O = (4,1), R = 1$$

$$d = OO = \sqrt{(4-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{9+0} = 3$$

www.riazikade.ir      حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱      @eshgheriazikonkour

برای این که این دو دایره مماس خارج باشند باید داشته باشیم:  $d = R + R'$

$$\rightarrow ۳ = ۱ + \sqrt{k+۲} \rightarrow ۲ = \sqrt{k+۲} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲ می رسانیم}}$$

$$۴ = k + ۲ \rightarrow \boxed{k = ۲}$$

**مثال ۳۵:** معادله دو دایره به صورت  $(x-۲)^2 + y^2 = ۱$  و  $x^2 + y^2 = R^2$  می باشد هرگاه این دو دایره بر یکدیگر مماس باشند مقدار  $R$  را به دست آورید.

حل:

$$(x-۲)^2 + y^2 = ۱ \rightarrow O = (۲, ۰), R = ۱$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \rightarrow O' = (۰, ۰), R' = R$$

$$d = OO' = \sqrt{(۰-۲)^2 + (۰-۰)^2} = \sqrt{۴} = ۲$$

برای این که این دو دایره مماس خارج باشند  $d = R + R'$  بنابراین:

$$۲ = R + ۱ \rightarrow \boxed{R = ۱}$$

برای این که این دو دایره مماس داخل باشند  $d = R - R'$  بنابراین:

$$۲ = R - ۱ \rightarrow \boxed{R = ۳}$$

**تسلیت ۱۴:** دو دایره به معادلات  $x^2 + y^2 - ۲x + ۶y = ۸$  و  $x^2 + y^2 + ۸x - ۴y + ۱۲ = ۰$  (تجربی ۸۷)

(۱) مماس خارج      (۲) مماس داخل      (۳) متقاطع      (۴) متخارج

حل: گزینه ۱

$$x^2 + y^2 - ۲x + ۶y = ۸$$

@eshgheriazikonkour    حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱    www.riazikade.ir

$$\xrightarrow{\text{مربع کامل کردن}} (x-1)^2 - 1 + (y+3)^2 - 9 = 8$$

$$\rightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 18 \rightarrow O = (1, -3), R = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مربع کامل کردن}} (x+4)^2 - 16 + (y-2)^2 - 4 + 12 = 0$$

$$(x+4)^2 + (y-2)^2 = 8 \rightarrow O = (-4, 2), R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$d = OO = \sqrt{(-4-1)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$$

چون  $d = R + R$  پس مماس خارج اند.

**مثال ۳۶:** دو دایره به معادلات  $x^2 + y^2 + 2x = 0$  و  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 13$  نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

(۱) مماس خارج    (۲) مماس داخل    (۳) متقاطع    (۴) متخارج

حل: گزینه ۲

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 13$$

$$\xrightarrow{\text{مربع کامل کردن}} (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 = 13$$

$$\rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 18 \rightarrow O = (1, -2), R = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + 2x = 1 \xrightarrow{\text{مربع کامل کردن}} (x+1)^2 - 1 + (y-0)^2 = 1$$

$$\rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 2 \rightarrow O = (-1, 0), R = \sqrt{2}$$

$$d = OO = \sqrt{(-1-1)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

چون  $d = R - R$  پس مماس داخل اند.

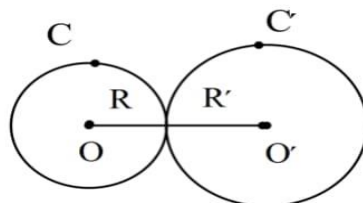
www.riazikade.ir      حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱      @eshgheriazikonkour

**تست ۱۵:** شعاع دایره ای به مرکز  $(-۲, ۲)$  و مماس خارج بر دایره  $x^2 + y^2 - ۲x + ۴y + ۱ = ۰$  کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۳ خارج از کشور)

۴(۴)       $۲\sqrt{۳}$ (۳)      ۳(۲)       $۲\sqrt{۲}$ (۱)

حل: گزینه ۲

با توجه به شکل زیر چون مماس خارج اند پس داریم:  $O\hat{O} = R + \hat{R}$



$$C: x^2 + y^2 - ۲x + ۴y + ۱ = ۰$$

مربع کامل کردن  $\rightarrow (x - ۱)^2 - ۱ + (y + ۲)^2 - ۴ + ۱ = ۰$

$$\rightarrow (x - ۱)^2 + (y + ۲)^2 = ۴$$

$$O = (۱, -۲), R = ۲$$

$$C': \hat{O} = (-۲, ۲)$$

$$\rightarrow d = O\hat{O} = \sqrt{(۱ + ۲)^2 + (-۲ - ۲)^2} = \sqrt{۹ + ۱۶} = ۵$$

$$O\hat{O} = R + \hat{R} \rightarrow ۵ = ۲ + \hat{R} \rightarrow \boxed{\hat{R} = ۳}$$

### ۱,۵ وتر مشترک دو دایره

معادله وتر مشترک دو دایره:

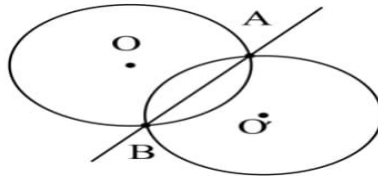
معادله وتر مشترک دو دایره از تفاضل معادلات دو دایره به دست می آید.

مبحث : جزوه فصل پنجم ریاضی پیش دانشگاهی تجربی مقاطع مخروطی

www.riazikade.ir حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ @eshgheriazikonkour

**مثال ۳۷:** معادله وتر مشترک دو دایره  $x^2 + y^2 = 2$  و  $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$  را به دست آورید.

حل: وتر مشترک AB



$$(x^2 + y^2 + 2x + 2y) - (x^2 + y^2 - 2) = 0$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 2y - x^2 - y^2 + 2 = 0$$

$$\rightarrow 2x + 2y + 2 = 0 \rightarrow x + y + 1 = 0$$

www.riazikade.ir      حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱      @eshgheriazikonkour

## ۲ بیضی و ویژگی های آن

### ۲,۱ تعریف بیضی

تعریف : بیضی مجموعه نقاطی از صفحه است که

جهت تهیه ادامه این جزوه با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس بگیرید و یا به آیدی

تلگرام @habib\_hashemi پیام دهید.

جهت تهیه جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضی تالیف حبیب هاشمی کارشناس ارشد ریاضی  
کاربردی با هیجده سال سابقه تدریس در برگزاری کلاس های کنکور؛ دبیر رسمی آموزش  
و پرورش منطقه ۴ تهران و مدرس دانشگاه با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس بگیرید و یا به آیدی

تلگرام @habib\_hashemi پیام دهید.

اینستاگرام: academy.riazi

جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبیب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour



@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

www.riazikade.ir

موفق بودن در ریاضی ادرصد استعداد و ۹۹ درصد پشتکار

## تدریس خصوصی ریاضیات

متوسطه اول و متوسطه دوم

کنکور - تقویتی

گروهی / انفرادی

به صورت تخصصی و کاملا مفهومی با جزوه اختصاصی

مشاهده جزوات در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

دبیر رسمی آموزش و پرورش با ۱۸ سال سابقه تدریس

کارشناس ارشد ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

مؤلف شش کتاب در زمینه کنکور

نویسنده برتر استان

معلم نمونه شهرستان و استان

نفر اول استان در جشنواره الگوهای برتر تدریس

نفر اول کشور در جشنواره الگوهای برتر تدریس

شماره تماس: ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱